Mémo — LOIS A DENSITE

I - GENERALITES

Densité de probabilité

On appelle ***densité de probabilité*** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction f définie sur I vérifiant :

- Pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$;
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- $\int_I f(x)\, dx = 1$.

Loi de probabilité

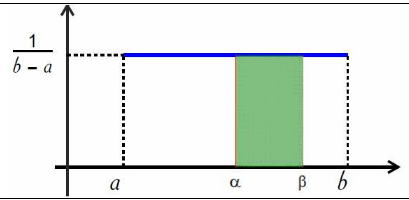
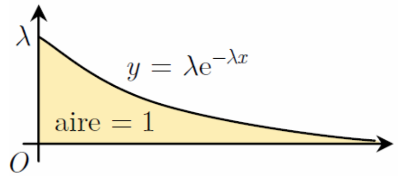
Soit X une variable aléatoire suivant une loi à densité f définie sur I.

Pour tout intervalle [a,b] inclus dans I , on a : $P_X([a,b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Espérance mathématique et variance

$E(X) = \int_I x f(x)\, dx$ *et* $V(X) = \int_I x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$

II - EXEMPLES DE VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

LOI UNIFORME sur [a , b]	LOI EXPONENTIELLE
Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur [a,b], si sa densité est une fonction f constante sur [a,b]. On a : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$	Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre le réel λ > 0, si sa densité est la fonction f définie sur [0 , + ∞ [par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
	
$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$
Pour tous réels α et β de [a , b], on a : $P_X([\alpha,\beta]) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$	$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$ $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
$P(a \leq X \leq b) = 1$	Une variable aléatoire *T* suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de **durée de vie sans vieillissement** : pour tous réels *t* et *h* positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$
$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\sigma_X = \dfrac{1}{\lambda}$

LOI NORMALE

THEOREME DE MOIVRE-LAPLACE

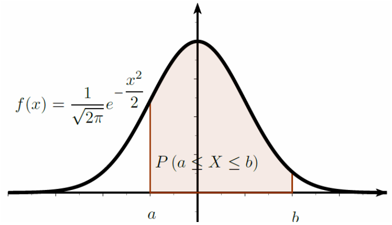
Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$, et $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$;

Pour tous réels a et b tels que a < b, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Une variable aléatoire T suit la ***loi normale centrée réduite*** notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si la densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$

par : $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$

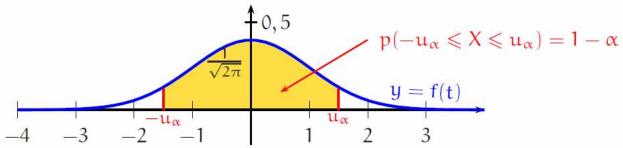


Propriétés : Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors : **E (X) = 0** et **σ (X) = 1**.

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, pour tout nombre réel α dans l'intervalle [0 ; 1], il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

Cas particuliers

$u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$



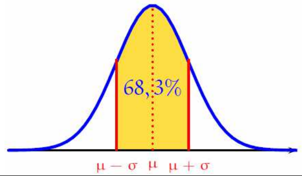
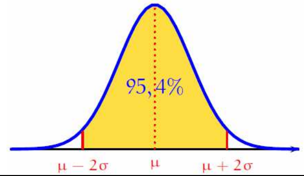
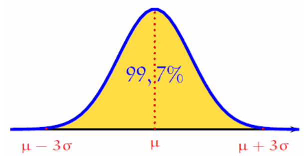
LA LOI NORMALE $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Une variable aléatoire X suit la ***loi normale*** de paramètres m et σ² (avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$)

si $\dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Quelques ordres de grandeur utiles à retenir

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

		
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	**$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$**	**$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$**

CALCULATRICE TI

Pour calculer P(a ≤ X ≤ b) où X suit la loi normale $\mathcal{N}(m ; \sigma^2)$, on utilise la fonction :

normalFRép (a, b, m, σ)

Pour Calculer P(X < b) : *On calculera une valeur approchée en prenant a = – 10^{99} par exemple.*
Pour Calculer P(X > a) : *On calculera une valeur approchée en prenant b = 10^{99} par exemple.*

Pour calculer le nombre k tel que P (X < k) = c, où X suit la loi $\mathcal{N}(m ; \sigma^2)$, on utilise la fonction :

FracNormale (c, m, σ)